

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que permetin emmagatzemar dades o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Siguin les matrius $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix}$ i $N = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu $M \cdot N$ i comproveu que la matriu resultant no és invertible.

[1 punt]

b) Trobeu els valors de t per als quals la matriu $N \cdot M$ és invertible.

[1 punt]

2. Sigui r la recta que passa pels punts $A = (0, 1, 1)$ i $B = (1, 1, -1)$.

a) Trobeu l'equació paramètrica de la recta r .

[1 punt]

b) Calculeu tots els punts de la recta r que estan a la mateixa distància dels plans $\pi_1: x + y = -2$ i $\pi_2: x - z = 1$.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ amb l'expressió } \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

3. Sigui la funció $f(x) = x^3 - x^2$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica i que és paral·lela a la recta d'equació $x + 3y = 0$.

[1 punt]

b) Calculeu, si n'hi ha, els punts de la gràfica en què la funció presenta un màxim o mínim relatiu o un punt d'inflexió.

[1 punt]

4. Considereu els punts $P = (3, -2, 1)$, $Q = (5, 0, 3)$, $R = (1, 2, 3)$ i la recta $r: \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$.
- a) Determineu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa per P i Q i és paral·lel a la recta r .
[1 punt]
- b) Donats el pla $x + 2y + m \cdot z = 7$ i el pla que passa per P , Q i R , trobeu m perquè siguin paral·lels i no coincidents.
[1 punt]
5. Sigui la funció $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$.
- a) Comproveu que la funció $f(x)$ compleix l'enunciat del teorema de Bolzano a l'interval $[0, 2]$ i que, per tant, l'equació $f(x) = 0$ té alguna solució a l'interval $(0, 2)$. Comproveu que $x = 1$ és una solució de l'equació $f(x) = 0$ i raoneu, tenint en compte el signe de $f'(x)$, que la solució és única.
[1 punt]
- b) A partir del resultat final de l'apartat anterior, trobeu l'àrea limitada per la gràfica de la funció $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 1$.
[1 punt]
6. Uns estudiants de batxillerat han programat un full de càlcul com el de la figura següent que dona la solució d'un sistema d'equacions compatible determinat d'una manera automàtica:

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
2										
3										
4		x	y	z						
5										sistema: COMPATIBLE DETERMINAT
6		1	2	-1	-6					x = 1
7		1	-1	-2	-3					y = -2
8		2	1	2	6					z = 3
9										
10										
11										
12										

- a) Escriviu el sistema i comproveu que els valors proposats com a solució són correctes.
[1 punt]
- b) Quin valor s'hauria de posar en lloc del 2 que està emmarcat en la imatge, corresponent a la cella E8 (a_{33} de la matriu de coeficients), perquè el sistema fos incompatible?
[1 punt]

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que permetin emmagatzemar dades o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu el sistema d'equacions lineals
$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 5 \\ 3x + 4y + 6z = 3, \text{ per a } m \in \mathbb{R}. \\ x + 3y + 2z = m \end{cases}$$
 - a) Expliqueu raonadament que per a qualsevol valor del paràmetre m el sistema té una única solució.
[1 punt]
 - b) Resoleu el sistema i trobeu l'expressió general del punt solució.
[1 punt]
2. Sigui el pla d'equació $\pi: x + y - z = 0$ i el punt $P = (2, 3, 2)$.
 - a) Calculeu el punt simètric del punt P respecte del pla π .
[1 punt]
 - b) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) dels dos plans paral·lels a π que estan a una distància $\sqrt{3}$ del punt P .
[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.
3. Sigui la funció $f(x) = a \cdot e^{-x^2 + bx}$, amb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.
 - a) Calculeu els valors de a i de b que fan que la funció tingui un extrem relatiu en el punt $(1, e)$.
[1 punt]
 - b) Per al cas $a = 3$ i $b = 5$, calculeu l'asíptota horitzontal de la funció f quan x tendeix a $+\infty$.
[1 punt]

4. Sabem que una funció $f(x)$ està definida per a tots els nombres reals i que és derivable dues vegades. Sabem també que té un punt d'inflexió en el punt d'abscissa $x = 2$, que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en aquest punt és $y = -124x + 249$ i que $f(-3) = -4$.

a) Calculeu $f''(2)$, $f'(2)$ i $f(2)$.

[1 punt]

b) Calculeu $\int_{-3}^2 f'(x) dx$.

[1 punt]

5. Siguin les rectes $r_1: x - 1 = \frac{y - 2}{-1} = z - 5$ i $r_2: (x, y, z) = (2 - 3\lambda, -1 + \lambda, 2)$.

a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que conté la recta r_1 i és paral·lel a la recta r_2 .

[1 punt]

b) Diguen quina condició s'ha de complir perquè existeixi un pla que contingui la recta r_1 i sigui perpendicular a la recta r_2 . Amb les rectes r_1 i r_2 de l'enunciat, comproveu si existeix un pla que contingui la recta r_1 i sigui perpendicular a la recta r_2 .

[1 punt]

6. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Si $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu identitat d'ordre 3, calculeu per a quins valors de k la

matriu $A + kI$ té inversa. Trobeu, si existeix, la matriu inversa de $A - 2I$.

[1 punt]

b) Calculeu la matriu X que satisfà l'equació $X \cdot A + A^T = 2 \cdot X$, en què A^T és la matriu transposada de la matriu A .

[1 punt]



Institut
d'Estudis
Catalans